مقدمهٔ ناشر

همین دیروز برام یه اتفاقی افتاد که از نظر خودم جالب بود و تا حدی نگاهم رو نسبت به آدما تغییر داد.

دیروز توی تاکسی نشسته بودم و راننده آهنگی گذاشته بود و گاهی هم خودش باهاش هم‌خونی می‌کرد. من خیلی عمیق داشتم به سوژه برای مقدمهٔ کتاب ماجرای بیست هندسه فکر می‌کردم و حواسم به آهنگ نبود و فقط در حد یک پس‌زمینهٔ گنگ و مبهم آهنگ رو می‌شنیدم. همین‌طور داشتم به مفاهیم دایره، چندضلعی، مثلث و قضیهٔ کسینوس‌ها فکر می‌کردم که یک‌دفعه بخش شنوایی قشر مخم فعال شد و قسمتی از ترانه که راننده با خواننده هم‌خوانی می‌کرد شفاف شد:

چشمات مث مثلث![1] ...

واقعاً؟ چه هم‌زمانی باحالی! شاعر این ترانه هم درگیر مفاهیم هندسی شده و ظاهراً این نوع نگاه، طرفدار هم داره.

این شد که از دیروز یه جور دیگه به چشم مردم نگاه می‌کنم و توی چشماشون دنبال نیمساز زوایای داخلی می‌گردم که آیا نیمسازهای مثلث چشماشون دقیقاً از مرکز دایرهٔ مردمکشان می‌گذرد یا نمی‌گذرد؟...

از شوخی و جدی گذشته می‌خوام یه جمله بگم و برم: هندسه درس خیلی باحالیه به شرط این‌که مثل شاعر این ترانه زاویهٔ دید هندسی به دنیا و زندگی داشته باشید.

این رو هم بگم که هر کی کتاب ماجرای بیست هندسه رو کامل بخونه و بفهمه، امکان نداره ۲۰ نگیره.

دم خانم زهرا جالینوسی که هندسه رو خیلی مؤدبانه و تر و تمیز می‌نویسه، گرم!

دم خانم زهره قموشی که تا این کتاب بشه کتاب از پا ننشست، گرم!

دم ویراستارای این کتاب و دم بچه‌های قهرمان و همیشه در صحنهٔ تولید گرم!

دم شما هم گرم!

۱- بعداً سرچ کردم دیدم این آهنگ رو گروه «پالت» اجرا کرده و اسم آلبومشون هم آقای بنفشه.

تقدیم به استوارترین تکیه‌گاهم، دستان پرمهر پدرم

و به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم

زهرا جالینوسی

مقدمهٔ مؤلف

به نام خداوند رنگین کمان

هندسه معمولاً از اون درس‌هایی بوده که بچه‌ها برای یادگرفتنش با معلما و کتاباشون درگیر بودن و آخر سال هم برای این‌که بتونن یه نمرهٔ خوبی بگیرن، چندتا قضیهٔ کتاب درسی رو حفظ می‌کردن و از همونا هم توی امتحان میومد و تمام. اما بعد از این‌که تأثیر امتحان نهایی توی کنکور به ۶۰ درصد رسید، همه چی متفاوت شد. الان طراح‌های امتحان نهایی هم قراره سخت‌گیر بشن و برای این‌که سطح بچه‌ها رو مشخص کنن، فقط چندتا قضیهٔ حفظی رو سؤال نمی‌دن و می‌رن سراغ کاربرد اون قضیه‌ها و سؤال‌های خیلی سخت‌تر ... .

حالا ما توی خیلی‌سبز یه راه حل پیدا کردیم براتون. برای این‌که بتونید ۶۰ درصد نمرهٔ نهایی کنکور رو توی مشتتون داشته باشید، این کارا رو انجام بدید:

از ابتدای سال تحصیلی کتاب **ماجرای بیست** هندسه ۲ رو تهیه کنید، هم‌زمان با درس‌دادن معلمتون، درس‌نامه و سؤال‌های اون رو حل کنید. بعد تک‌تک پاسخ‌هاتون رو با پاسخ‌نامه تشریحی کتاب چک کنید. حالا که به یه تسلط نسبی رو سؤال‌ها رسیدید، برید سراغ سؤال‌های 🚀 که از همه سؤال‌ها سخت‌تره و شما رو برای سؤال‌های سخت احتمالی امتحان نهایی آماده می‌کنه. تمااام. حالا دیگه ۲۰گرفتن براتون مثل آب‌خوردن می‌شه ... .

کتاب ماجرای بیست هندسه یازدهم اینا رو داره:

درس‌نامه: سعی کردیم خیلی ساده، روان و کاربردی (جوری که راحت بتونید هندسه رو بخونید، یاد بگیرید و حتی لذت ببرید.) درس رو آموزش بدیم. مطالب اضافه در این کتاب نمی‌بینید اما هر چیزی که برای کسب ۲۰ نهایی لازمه رو دارید. چینش درس‌ها کاملاً مثل کتاب درسیه، البته بیشتر جاها برای این‌که مطالب، طولانی نشه و حوصله‌تون سر نره، درس به چند بخش تقسیم شده و سؤال‌های هر قسمت رو جداگونه آوردیم.

در امتحان چه خبر: حجم مطالب در درس هندسه زیاده؛ پس خیلی مهمه که تا می‌تونید، مطالب رو تیپ‌بندی‌شده و منظم یاد بگیرید. ما سعی کردیم توی کادرهای (در امتحان چه خبر؟) این کار را برای شما انجام بدیم. مطالب هر درس رو تیپ‌بندی کردیم و سؤال‌های مربوط به هر تیپ رو هم مشخص کردیم. پس می‌تونید برید و سؤال‌های هر تیپی رو که خوب یاد نگرفتید، دوباره و دوباره حل کنید و بهشون مسلط بشید.

سؤال‌های امتحانی: همهٔ مثال‌ها و تمرین‌های کتاب، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌ها و همهٔ سؤال‌های نهایی توی این کتاب موجوده و به قول معروف پوشش کامل کتاب درسی و امتحان‌های نهایی به جوری رعایت شده که بعد از خوندن «**ماجرای بیست**» دیگه هیچ نگرانی‌ای ندارید که چیزی جا افتاده باشه.

سؤال‌هایی که کنار آن‌ها علامت 🚀 است، سطح دشوارتری نسبت به بقیهٔ سؤال‌ها داره و شما رو برای سؤال‌های سخت نهایی آماده می‌کنه.

پاسخ‌های تشریحی: بعد از حل سؤال‌ها، حتماً پاسخ‌ها را تحلیل کنید.

آزمون‌های پایانی کتاب: در انتهای کتاب دو امتحان ترم اول داریم و چهارتا امتحان ترم دوم. حتماً قبل از امتحان نهایی این سؤال‌ها رو حل کنید و به بارم‌بندی اون‌ها هم توجه کنید که بدونید باید چه‌جوری جواب بدی که مصحح بهتون نمرهٔ کامل بده.

در پایان ممنون از:

دکتر نصری که خیلی‌سبز رو ساخت و درس‌خوندن رو برای بچه‌ها لذت‌بخش کرد ... .

مهندس مهدی هاشمی که برای نوشتن این کتاب به ما اعتماد کرد.

خانم طاهری و خانم قموشی که زحمت هماهنگی‌ها رو کشیدند و خیلی اذیتشون کردیم.

ویراستارهای خوب مجموعه آقایان و خانم‌ها ماهک کناره، علیرضا کاظمی‌بقا و لیلا سمیعی‌عارف که برای بهترشدن کتاب به ما کمک کردن.

شما بچه‌های پرانگیزه که برای آیندهٔ بهتر خودتون تلاش می‌کنید.

شهریور ۱۴۰۳

مقدمهٔ مؤلف

فهرست

درس‌نامه
و
سؤالات امتحانی

فصل ۱ : دایره

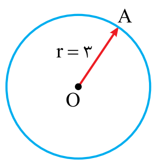
چرا باید دایره و ویژگی‌هاش رو یاد بگیریم و کاربردشون تو زندگی چیه؟ یه مثال می‌زنم براتون ... توی هندسه یه قضیه داریم به اسم «قضیهٔ هم‌پیرامونی» که می‌گه: «از بین همهٔ شکل‌های هندسی با محیط یکسان، اونی که مساحت بیشتری داره، دایره است.» از این قضیه در گذشته‌ها برای ساخت قلعه‌ها و الان پلان ساختمان‌ها و سیلوهای نگهداری غلات استفاده می‌شه. یعنی هر جایی که بخواهیم از محیط موجود، بیشترین استفاده رو ببریم می‌ریم سراغ دایره.

توی این فصل، اول یک سری تعاریف اولیهٔ دایره رو یاد می‌گیریم. (که اکثرشو از سال‌های قبل بلدید.) بعد می‌ریم سراغ انواع زاویه‌ها و روابط طولی در دایره و در آخر هم به چندضلعی‌های محیطی و محاطی می‌پردازیم.

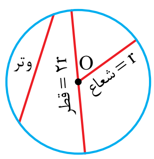
بخش ۱: مفاهیم اولیهٔ دایره

تعریف مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطه‌ای ثابت (مثل O) به یک فاصلهٔ ثابت (مثل r) باشد را یک دایره می‌گوییم و آن را به صورت $C(O,r)$ نشان می‌دهیم.

مثلاً مجموعه نقاطی که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ۳ باشند، یک دایره به مرکز O و به شعاع ۳ به صورت زیر است:



C(O,۳)



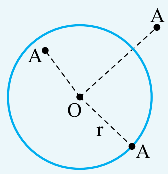
شعاع دایره: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن روی محیط دایره باشد.

وتر دایره: پاره‌خطی که دو سر آن روی محیط دایره باشد.

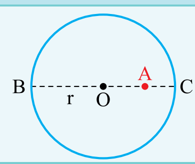
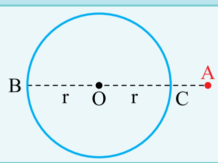
قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز آن عبور کند. (اندازهٔ قطر دو برابر شعاع است.)

اوضاع نسبی نقطه و دایره

دایرهٔ $C(O,r)$ و نقطهٔ دلخواه A را در صفحه در نظر بگیرید. برای این‌که تشخیص دهیم نقطهٔ A در چه وضعیتی با دایره قرار دارد، از جدول زیر کمک می‌گیریم:

وضعیت	شرح	شکل
داخل دایره	اگر فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایره از شعاع آن کم‌تر باشد: $AO < r$	
روی دایره	اگر فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد: $AO = r$	
بیرون از دایره	اگر فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایره از شعاع آن بیشتر باشد: $AO > r$	

نکته: برای پیداکردن کم‌ترین و بیشترین فاصلهٔ نقاط دایره از نقطهٔ دلخواه A، باید ابتدا مانند شکل‌های جدول زیر، قطری از دایره که از A می‌گذرد را رسم کنیم، در این صورت همواره داریم:

نقطهٔ A درون دایره باشد.	نقطهٔ A بیرون دایره باشد.
	
کم‌ترین فاصله $= AC = r - AO$ بیشترین فاصله $= AB = r + AO$	کم‌ترین فاصله $= AC = AO - r$ بیشترین فاصله $= AB = AO + r$

بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که مکان قرارگیری نقطهٔ A تأثیری در کم‌ترین و بیشترین فاصله ندارد و همواره داریم:

کم‌ترین فاصله $= |AO - r|$

بیشترین فاصله $= AO + r$

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایرهٔ $C(O,۴)$ برابر $۳x - ۲$ است. اگر A خارج دایره باشد:

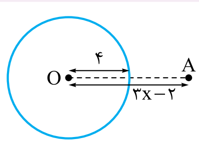
الف) محدودهٔ x را تعیین کنید.

ب) کم‌ترین مقدار صحیح x را به دست آورید.

پ) به ازای کم‌ترین مقدار صحیح x، بیشترین فاصلهٔ A تا نقاط دایره را به دست آورید.

پاسخ: الف اگر A خارج از دایره باشد، باید فاصلهٔ A تا مرکز دایره از شعاع دایره بزرگ‌تر باشد، پس داریم:

$$۳x - ۲ > ۴ \Rightarrow ۳x > ۶ \Rightarrow x > ۲$$

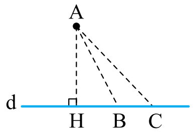


ب پس کم‌ترین مقدار صحیح x، کم‌ترین عدد صحیح بعد از ۲ یعنی برابر ۳ است.

پ به ازای $x = ۳$، فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایره برابر است با: $OA = ۳x - ۲ = ۷$

و بیشترین فاصلهٔ A تا نقاط دایره برابر است با: $max = OA + r = ۷ + ۴ = ۱۱$

اوضاع نسبی خط و دایره

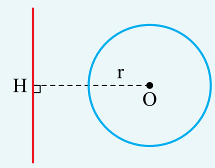
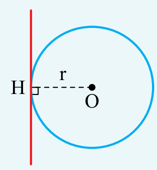
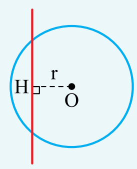


یادآوری: خط d و نقطهٔ A خارج از آن را به صورت شکل روبه‌رو در نظر بگیرید. وقتی می‌گوییم فاصلهٔ A تا خط d، یعنی طول خط عمود رسم‌شده از A تا d یا همان طول خط AH در شکل روبه‌رو و فاصلهٔ A تا هر نقطهٔ دیگری از d به‌جز H همواره از AH بیشتر است.

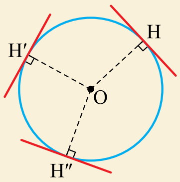
$AH =$ فاصلهٔ A تا d

$AH < AB, AH < AC, \ldots$

با توجه به یادآوری بالا، اگر دایره‌ای مانند $C(O,r)$ و خط دلخواهی مانند d داشته باشیم، این دایره و خط سه وضعیت نسبت به یکدیگر دارند که در جدول زیر می‌بینید:

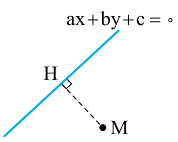
۱. متخارج	۲. مماس	۳. متقاطع
فاصلهٔ خط و مرکز دایره از شعاع دایره بیشتر است. $(OH > r)$	فاصلهٔ خط و مرکز دایره برابر شعاع دایره است. $(OH = r)$	فاصلهٔ خط و مرکز دایره از شعاع دایره کم‌تر است. $(OH < r)$
		
تعداد نقاط اشتراک = صفر	تعداد نقاط اشتراک = ۱	تعداد نقاط اشتراک = ۲

نکته: همواره خط مماس بر دایره در نقطهٔ H، بر شعاع گذرنده از نقطهٔ H عمود است.



یادآوری: فاصلهٔ نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$MH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



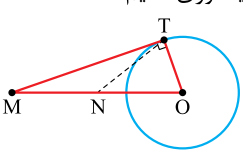
مثال: **فاصلهٔ $O(3,-1)$ مرکز دایرهٔ $C(O,2)$ را از خط $3x+4y=10$ بیابید. وضعیت نسبی خط و دایره چگونه است؟ این خط با دایرهٔ C چند نقطهٔ اشتراک دارد؟**

پاسخ: ابتدا فاصلهٔ نقطهٔ $(3,-1)$ از خط $3x+4y=10$ را به دست می‌آوریم:

$$OH = \frac{|3(3)+4(-1)-10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{5}{5} = 1 < 2$$

$OH < R$ پس خط و دایره متقاطع‌اند و دو نقطهٔ اشتراک دارند.

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج آن برای رسم خط مماس بر دایره از یک نقطه خارج از آن، ابتدا باید موارد زیر را یادآوری کنیم:

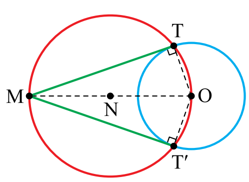


۱) مماس بر دایره همواره بر شعاع دایره عمود است. پس در شکل روبه‌رو MT بر OT عمود است و مثلث MTO قائم‌الزاویه است.

۲) میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه همیشه نصف وتر است، پس در شکل بالا داریم: $MN = NO = NT$

بنابراین اگر دایره‌ای به مرکز N و قطر OM رسم کنیم حتماً از نقطهٔ T هم عبور می‌کند.

حالا برویم سراغ رسم خطوط مماس بر دایرهٔ $C(O,R)$ از نقطهٔ M خارج از آن:



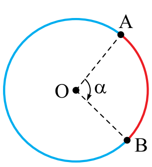
گام اول: از نقطهٔ M خارج دایره به O (مرکز دایره) وصل می‌کنیم و عمودمنصف پاره‌خط OM را رسم می‌کنیم تا نقطهٔ N پیدا شود. (رسم عمودمنصف را در سال دهم یاد گرفتیم.)

گام دوم: اگر به مرکز N و شعاع ON، دایره‌ای رسم کنیم که دایرهٔ $C(O,R)$ را در دو نقطهٔ T و T' قطع کند و M را به T و T' وصل کنیم، آن‌گاه MT و MT' مماس‌های وارد بر دایره از نقطهٔ M هستند.

نکته: ۱) از هر نقطه روی دایره فقط یک مماس می‌توانیم بر دایره رسم کنیم.

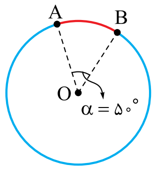
۲) از هر نقطه خارج از دایره، دو مماس می‌توانیم بر دایره رسم کنیم.

کمان، قطاع و قطعه در دایره

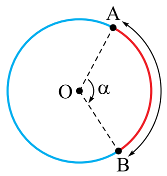


کمان قسمتی از محیط دایره که بین دو نقطهٔ A و B محدود شده باشد را کمان $\overset{\frown}{AB}$ می‌نامیم. (بخش قرمزرنگ در دایرهٔ روبه‌رو)

زاویهٔ مرکزی زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و دو ضلع آن دو شعاع از دایره باشد را زاویهٔ مرکزی می‌نامیم. (مثل $A\hat{O}B$ در شکل روبه‌رو)

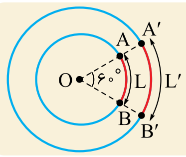


اندازهٔ کمان (α) اندازهٔ هر کمان همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی آن است و واحد آن درجه است. مثلاً اندازهٔ کمان AB در شکل مقابل برابر است با: $\alpha = A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = ۵۰^\circ$

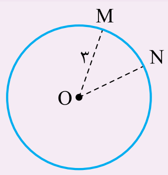


طول کمان (L) محیط هر دایره در واقع یک کمان به اندازهٔ ۳۶۰° و طول $۲\pi R$ است. بنابراین طول کمان AB در شکل روبه‌رو را می‌توانیم با استفاده از یک تناسب ساده، محاسبه کنیم:

$$\frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازهٔ } \overset{\frown}{AB}}{۳۶۰^\circ} \Rightarrow \boxed{\text{طول } \overset{\frown}{AB} = L = \frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}(۲\pi R)}$$



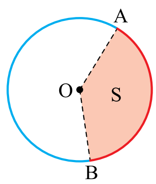
نکته: با توجه به شکل مقابل می‌توانیم بفهمیم که کمان‌هایی با اندازهٔ برابر در دایره‌هایی با شعاع‌های متفاوت، طول‌های متفاوتی دارند. مثلاً در شکل مقابل اندازهٔ هر دو کمان AB و A′B′ برابر ۶۰° است ولی $L \neq L'$. *(پس اندازهٔ کمان ربطی به شعاع دایره نداره! ولی طول کمان با شعاع رابطهٔ مستقیم داره.)*



مثال: در شکل مقابل، زاویهٔ مرکزی $M\hat{O}N$ برابر ۴۵° است. اندازهٔ $\overset{\frown}{MN}$ و طول این کمان را به دست آورید.

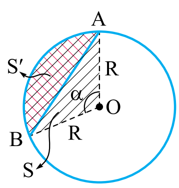
پاسخ: اندازهٔ هر کمان برابر اندازهٔ زاویهٔ مرکزی رو به آن است، پس $\overset{\frown}{MN} = ۴۵^\circ$.
طول کمان MN هم از رابطهٔ مقابل محاسبه می‌شود:

$$L = \frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}(۲\pi R) = \frac{۴۵^\circ}{۳۶۰^\circ}(۲\pi \times ۳) = \frac{۳\pi}{۴}$$



قطاع دایره مساحت بین دو شعاع دایره و محیط آن را یک قطاع می‌نامیم و این مساحت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\text{مساحت قطاع AOB}}{\text{مساحت دایره}} = \frac{\text{اندازهٔ } \overset{\frown}{AB}}{۳۶۰^\circ} \Rightarrow \boxed{\text{مساحت قطاع AOB} = S = \frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}(\pi R^۲)}$$

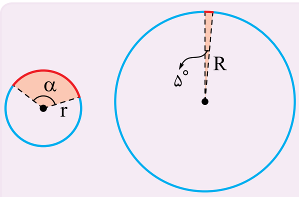


یک قطعه از دایره مساحت محصور بین یک وتر از دایره و محیط آن، یک قطعه از دایره است که با هاشور قرمز در شکل مقابل نشان داده شده است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{S' = S_{\text{قطاع}} - S_{\overset{\Delta}{AOB}}}$$

یادآوری: در شکل مقابل، با داشتن زاویهٔ α، مساحت مثلث $\overset{\Delta}{AOB}$ برابر است با:

$$\boxed{S_{\overset{\Delta}{AOB}} = \frac{۱}{۲}R^۲ \sin\alpha}$$



مثال: در شکل روبه‌رو، شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر ۵ برابر دایرهٔ کوچک‌تر است. اگر مساحت دو قطاع رنگی با هم برابر باشد، زاویهٔ α در دایرهٔ کوچک‌تر را به دست آورید.

پاسخ: طبق فرض سؤال $R = ۵r$ و مساحت دو قطاع رنگی برابر است. پس داریم:

$$\frac{\pi R^۲ \times ۵^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{\pi r^۲ \alpha}{۳۶۰^\circ} \xrightarrow{R=۵r} ۲۵r^۲ \times ۵^\circ = r^۲\alpha \Rightarrow \alpha = ۱۲۵^\circ$$

در امتحان چه خبر؟

در اولین بخش از اولین فصل هندسهٔ یازدهم با یک سری سؤالات اکثراً ساده و روتین مواجه می‌شیم که به صورت زیر تیپ‌بندی می‌شن:

تیپ ۱ *سؤالات جای خالی و درست – نادرست که غالبشون مربوط به وضعیت نسبی نقطه و خط با دایره است.*

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۱ تا ۵

تیپ ۲ *سؤالات تعریفی و اثباتی که با خوندن درس‌نامه بهشون مسلط می‌شید.*

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۶ تا ۱۲

تیپ ۳ *سؤالاتی در مورد طول کمان در دایره که فقط کافیه فرمول* $L = \frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}(۲\pi R)$ *رو بدونیم.*

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۱۴ تا ۱۷

تیپ ۴ *در آخر هم سؤال‌های مساحت قطاع و قطعه در دایره که اون‌ها هم فرمول‌های ساده و روتینی دارن.*

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۱۸ تا ۲۱

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱- تعداد نقاط اشتراک دایره و خط متقاطع بر آن، .... است.

۲- از هر نقطه خارج دایره، .... مماس می‌توانیم بر دایره رسم کنیم.

۳- اندازهٔ هر کمان برابر اندازهٔ زاویهٔ .... رو به آن است.

۴- طول بزرگ‌ترین وتر در دایره‌ای به مساحت ۴۹π، .... است. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۵- فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایرهٔ $C(O,۳)$ برابر $۷-x$ است. کم‌ترین مقدار صحیح x به شرطی که A درون دایره باشد، برابر است با: .... (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

ثابت کنید:

۶- اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ $C(O,R)$ برابر α درجه باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با: (کار در کلاس صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)

$$L=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ}$$

۷- اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ $C(O,R)$ برابر α درجه باشد، نشان دهید مساحت قطاع ایجادشده برابر است با: (کار در کلاس صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)

$$S=\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰^\circ}$$

مفاهیم زیر را تعریف کنید:

۸- زاویهٔ مرکزی　　۹- قطاع　　۱۰- قطعه　　۱۱- کمان

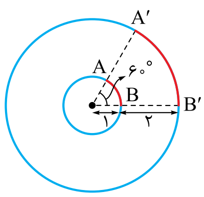
۱۲- طریقهٔ رسم مماس بر یک دایره از نقطه‌ای خارج آن را به همراه شکل شرح دهید.

۱۳- نزدیک‌ترین و دورترین فاصلهٔ نقطهٔ A از یک دایره به ترتیب ۸ و ۱۲ است. شعاع دایره چه‌قدر است؟

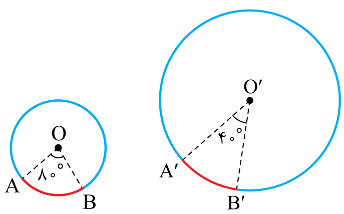
۱۴- با توجه به شکل، اندازه و طول کمان‌های زیر را بنویسید. (برگرفته از کار در کلاس صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)

الف) $\overset{\frown}{AB}$

ب) $\overset{\frown}{A'B'}$



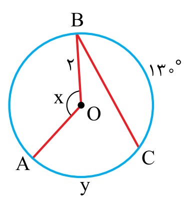
۱۵- در شکل مقابل، طول کمان‌های AB و A'B' با هم برابر است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر دایرهٔ کوچک‌تر است؟



۱۶- در شکل روبه‌رو، (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

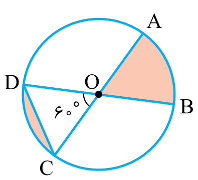
الف) اگر اندازهٔ زاویهٔ مرکزی x برابر ۱۰۰° باشد، اندازهٔ کمان y را به دست آورید.

ب) اگر اندازهٔ کمان y برابر ۷۰° باشد، طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ x را به دست آورید.

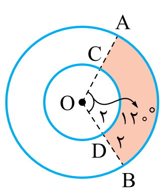


۱۷- اگر طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی ۱۲۰° در دایرهٔ $C(O,r)$ برابر ۴π باشد، مساحت و محیط دایره را به دست آورید.

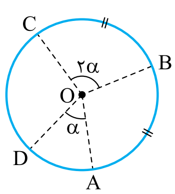
۱۸- مطابق شکل، در دایره‌ای به شعاع ۳، مساحت قطاع و قطعهٔ قرمزرنگ را به دست آورید.



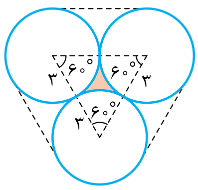
۱۹- در شکل مقابل طول کمان‌های AB و CD و مساحت قسمت رنگی را به دست آورید.



۲۰- مطابق شکل، اگر O مرکز دایره و کمان‌های AB و BC هم‌اندازهٔ و $CD=۱۰۰^\circ$ باشد، مقدار زاویهٔ α را به دست آورید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



۲۱- سه دایره به شعاع‌های ۳ سانتی‌متر دوبه‌دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل روبه‌رو، این سه دایره به وسیلهٔ یک نخ به یکدیگر بسته شده‌اند: *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*



الف) طول این نخ را به دست آورید.

ب) مساحت ناحیهٔ رنگی را به دست آورید.

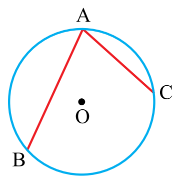
بخش ۲: انواع زاویه در دایره

در درس قبل، زاویهٔ مرکزی و رابطهٔ آن با کمان در دایره را مطرح کردیم. در این درس‌نامه می‌خواهیم محاسبهٔ بقیهٔ زاویه‌های دایره را یاد بگیریم.

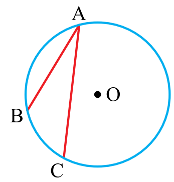
انواع زاویه در دایره عبارت‌اند از:

۱. زاویهٔ محاطی

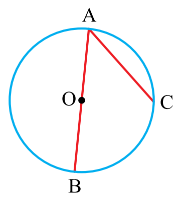
زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و اضلاعش دو وتر از دایره باشد، مثلاً در شکل‌های زیر زاویه‌های $B\hat{A}C$ محاطی هستند:



(الف)



(ب)

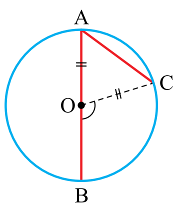


(پ)

قضیه اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.

اثبات: برای اثبات این قضیه، حالتی را در نظر می‌گیریم که یکی از اضلاع زاویهٔ محاطی، قطری از دایرهٔ $C(O,R)$ باشد:

(اثبات اندازهٔ زاویهٔ محاطی در شکل‌های الف و ب بالا، در تمرین‌های این درس موجوده.)



فرض	$\hat{A}$ زاویهٔ محاطی است.
حکم	$\hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

اگر در این شکل از نقطهٔ C به O وصل کنیم، زاویهٔ $C\hat{O}B$، یک زاویهٔ خارجی برای مثلث AOC است و از طرفی می‌دانیم که مثلث AOC یک مثلث متساوی‌الساقین است، $(AO=OC=R)$ پس داریم:

$$C\hat{O}B=O\hat{A}C+O\hat{C}A \xrightarrow{O\hat{A}C=O\hat{C}A} C\hat{O}B=۲O\hat{A}C=۲\hat{A} \quad (۱)$$

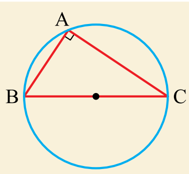
هر زاویهٔ مرکزی برابر کمان روبه‌رو به خودش است، پس:

$$C\hat{O}B=\overset{\frown}{BC} \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که:

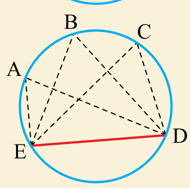
$$C\hat{O}B=\overset{\frown}{BC}=۲\hat{A} \Rightarrow \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

نکته: ۱ زاویهٔ محاطی رو به قطر دایره، همیشه برابر ۹۰° است، شکل مقابل را ببینید:



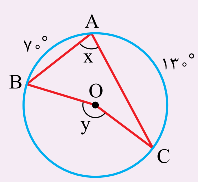
$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

۲ زوایای محاطی رو به یک کمان، همواره با هم برابرند:

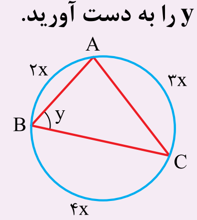


$$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{ED}}{۲}$$

مثال: در شکل‌های زیر، مقادیر x و y را به دست آورید.



(الف)



(ب)

پاسخ: الف می‌دانیم محیط یک دایره ۳۶۰° است، پس مجموع کمان‌ها در شکل (الف) برابر است با ۳۶۰°، در نتیجه اندازهٔ کمان BC برابر است با:

$$۷۰^\circ+۱۳۰^\circ+\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۱۶۰^\circ$$

هر زاویهٔ مرکزی برابر کمان روبه‌روی خودش است، پس:

$$y=۱۶۰^\circ$$

و هر زاویهٔ محاطی برابر نصف کمان روبه‌رو به خودش است:

$$x=\frac{160^\circ}{2}=80^\circ$$

ب مجموع کمان‌های یک دایره برابر 360°، پس داریم:

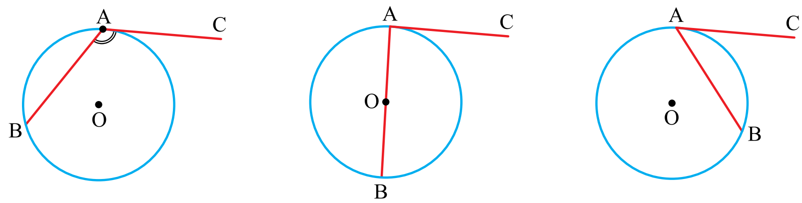
$$2x+3x+4x=360^\circ \Rightarrow 9x=360^\circ \Rightarrow x=40^\circ$$

در نتیجه اندازهٔ زاویهٔ محاطی y برابر است با:

$$y=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{3x}}{2}=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ$$

۲. زاویهٔ ظلی

زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلعش وتری از دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره باشد، مثلاً در شکل‌های زیر، $B\hat{A}C$ یک زاویهٔ ظلی است:

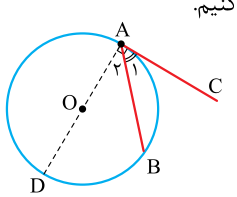


(الف) (ب) (پ)

قضیه اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه.

اثبات: برای اثبات این قضیه، زاویهٔ ظلی $C\hat{A}B$ در شکل زیر را در نظر گرفته و قطری از دایره که شامل نقطهٔ A باشد را رسم می‌کنیم.

فرض	$\hat{A}$ زاویهٔ ظلی است.
حکم	$\hat{A}_1=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$



می‌دانیم که همواره خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است، پس: $D\hat{A}C=90^\circ$ (۱)

و کمان DBA هم نصف دایره است و مقدار آن برابر است با: $\overset{\frown}{DBA}=180^\circ$ (۲)

پس طبق (۱) و (۲) داریم:

$$D\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{DBA}}{2}$$

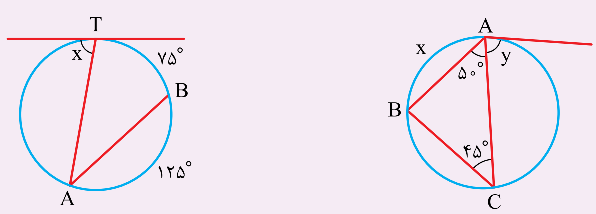
از طرفی زاویهٔ A_2 در شکل، یک زاویهٔ محاطی است و مقدار آن برابر است با:

$$\hat{A}_2=\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$$

حالا برای محاسبهٔ زاویهٔ ظلی $\hat{A}_1$ داریم:

$$\hat{A}_1=D\hat{A}C-\hat{A}_2=\frac{\overset{\frown}{DBA}}{2}-\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}=(\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}+\frac{\overset{\frown}{AB}}{2})-\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \boxed{A_1=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}}$$

مثال: در شکل‌های زیر، مقادیر x و y را به دست آورید.



(الف) (ب)

پاسخ: **الف** در شکل (الف)، مجموع اندازهٔ کمان‌های دایره برابر 360° است، پس کمان AT برابر است با:

$$75^\circ+125^\circ+\overset{\frown}{AT}=360^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AT}=160^\circ$$

اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر نصف کمان رو به خودش است، پس:

$$x=\frac{\overset{\frown}{AT}}{2}=80^\circ$$

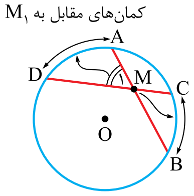
ب در شکل (ب)، کمان x رو به زاویهٔ محاطی $\hat{C}$ است، پس:

$$\hat{C}=45^\circ=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}=\frac{x}{2} \Rightarrow x=90^\circ$$

زاویهٔ ظلی y هم برابر $\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ است که کمان AC رو به زاویهٔ محاطی B نیز قرار دارد پس داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}:\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{B}=85^\circ \Rightarrow \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=170^\circ \Rightarrow y=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}=85^\circ$$

۳. زاویهٔ بین دو وتر متقاطع درون دایره

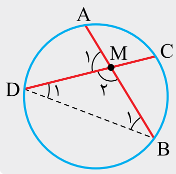


در شکل مقابل، دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ M درون دایره قطع کرده‌اند و چهار زاویهٔ دوبه‌دو متقابل به رأس به وجود آمده است.

اندازهٔ هر کدام از این زاویه‌ها از قضیهٔ زیر به دست می‌آید:

قضیه زاویهٔ بین دو وتر که درون دایره یکدیگر را قطع کنند برابر است با نصف مجموع کمان‌های مقابل به آن زاویه.

$$\hat{M}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{۲}$$

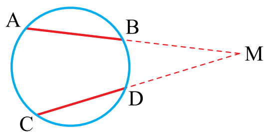


اثبات: برای اثبات این قضیه، ابتدا نقاط B و D را به هم وصل می‌کنیم. مطابق شکل در مثلث BMD، زاویهٔ $M_۱$، یک زاویهٔ خارجی است و مقدار آن برابر است با:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{M}_۱ = \hat{B}_۱ + \hat{D}_۱ \\ &\text{محاطی}\ \hat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ &\text{محاطی}\ B_۱ = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{B}_۱ + \hat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD}}{۲}$$

(همین‌طوری می‌تونیم ثابت کنیم که: $\hat{M}_۲ = \frac{\overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{AC}}{۲}$ *)*

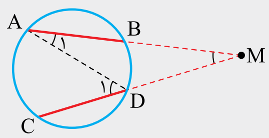
۴. زاویهٔ بین امتداد دو وتر در خارج از دایره



در شکل مقابل، دو وتر AB و CD در نقطهٔ M خارج از دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند، اندازهٔ زاویهٔ M از قضیهٔ زیر به دست می‌آید:

قضیه زاویهٔ بین امتداد دو وتر که خارج از دایره یکدیگر را قطع کنند برابر است با نصف تفاضل کمان‌های مقابل به آن زاویه.

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

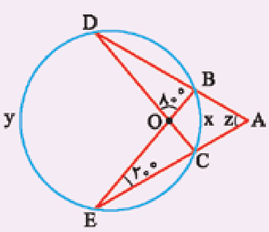


اثبات: برای اثبات این قضیه، ابتدا نقاط A و D روی محیط دایره را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا مثلث ADM تشکیل شود. حالا زاویهٔ $D_۱$، یک زاویهٔ خارجی برای $\overset{\Delta}{ADM}$ است که مقدار آن برابر با $\hat{D}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{M}$ است. در نتیجه می‌توانیم مقدار $\hat{M}$ را به صورت زیر به دست آوریم:

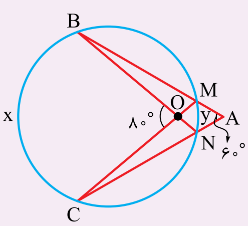
$$\left.\begin{aligned} &\hat{D}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{M} \\ &\text{محاطی}\ \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \\ &\text{محاطی}\ \hat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{M} = \hat{D}_۱ - \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

مثال: در شکل‌های زیر مقادیر مجهول را به دست آورید.

ب) y



الف) x



پاسخ: الف با توجه به آن‌چه در درسنامه گفتیم، زاویهٔ O و A را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{O} = \frac{x+y}{۲} = ۸۰^\circ \Rightarrow x+y = ۱۶۰^\circ \\ &\hat{A} = \frac{x-y}{۲} = ۶۰^\circ \Rightarrow x-y = ۱۲۰^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۲x = ۲۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۴۰^\circ , y = ۲۰^\circ$$

ب $\hat{E}$ یک زاویهٔ محاطی است. مقدار آن برابر است با:

$$\hat{E} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{x}{۲} = ۲۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ \quad (۱)$$

از طرفی مقادیر زاویه‌های O و A به صورت مقابل نوشته می‌شود:

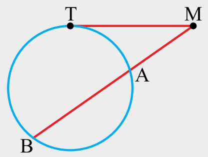
$$\hat{O} = \frac{y+x}{۲} = ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ \Rightarrow y + x = ۲۰۰ \xrightarrow{(۱)} y = ۱۶۰^\circ$$

$$A = \frac{y-x}{۲} = z \Rightarrow z = \frac{۱۶۰ - ۴۰}{۲} = ۶۰^\circ$$

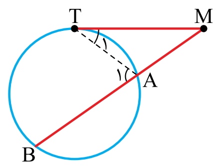
۵. زاویهٔ بین یک مماس و امتداد وتری از دایره

قضیه اگر از نقطهٔ M خارج از دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره به صورت شکل مقابل رسم کنیم، زاویهٔ M برابر است با:

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BT}-\overset{\frown}{AT}}{۲}$$



اثبات: برای اثبات این قضیه کافی است از نقطهٔ A به T وصل کنیم، آن‌گاه زاویهٔ $A_۱$، یک زاویهٔ محاطی و همچنین زاویهٔ خارجی در مثلث تشکیل‌شدهٔ ATM است و $T_۱$ هم یک زاویهٔ ظلی است، پس داریم:

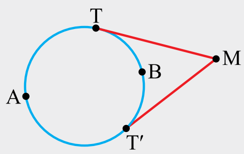


$$\left.\begin{array}{l}\text{محاطی}\ \hat{A}_۱=\frac{\overset{\frown}{BT}}{۲}\\ \text{ظلی}\ \hat{T}_۱=\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}\\ \text{در}\ \overset{\triangle}{ATM}:\hat{A}_۱=\hat{T}_۱+\hat{M}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{M}=\hat{A}_۱-\hat{T}_۱=\frac{\overset{\frown}{BT}-\overset{\frown}{AT}}{۲}$$

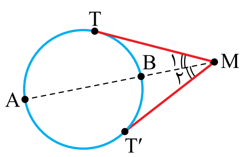
۶. زاویهٔ بین دو مماس از نقطه‌ای خارج دایره

قضیه اگر از نقطهٔ M خارج از دایره مطابق شکل روبه‌رو، دو مماس بر دایره رسم کنیم، آن‌گاه زاویهٔ M برابر است با:

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{TAT'}-\overset{\frown}{TBT'}}{۲}$$



اثبات: برای اثبات این قضیه، ابتدا از نقطهٔ M یک قاطع بر دایره رسم می‌کنیم تا در نقاط A و B دایره را قطع کند، آن‌گاه طبق قضیهٔ بالا می‌توانیم زاویهٔ بین مماس و قاطع بر دایره از نقطهٔ خارج آن را به صورت زیر بنویسیم:

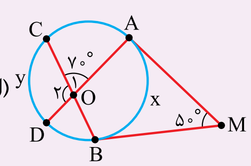


$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_۱=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}\\ \hat{M}_۲=\frac{\overset{\frown}{AT'}-\overset{\frown}{BT'}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{M}=\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}+\overset{\frown}{AT'}-\overset{\frown}{BT'}}{۲}=\frac{(\overset{\frown}{AT}+\overset{\frown}{AT'})-(\overset{\frown}{BT}+\overset{\frown}{BT'})}{۲}=\frac{\overset{\frown}{TAT'}-\overset{\frown}{TBT'}}{۲}$$

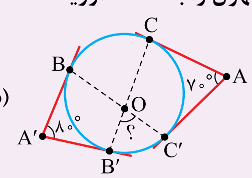
مثال: در شکل‌های زیر، مقادیر مجهول را به دست آورید.

(برگرفته از تمرین صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

الف)



ب)



پاسخ: **الف** در شکل الف، مقدار زاویهٔ $O_۱$ و $O_۲$ و M را می‌نویسیم:

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AC}+y+\overset{\frown}{BD}-x}{۲}=۵۰^\circ\ (۱)$$

$$\hat{O}_۱=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{۲}=۷۰^\circ\xrightarrow{(۱)}\frac{y-x}{۲}+۷۰^\circ=۵۰^\circ\Rightarrow y-x=-۴۰^\circ\ (۲)$$

$$\hat{O}_۲=\frac{y+x}{۲}=۱۸۰^\circ-۷۰^\circ=۱۱۰^\circ\Rightarrow y+x=۲۲۰^\circ\ (۳)$$

$$\xrightarrow{(۲)+(۳)}۲y=۱۸۰^\circ\Rightarrow y=۹۰^\circ\Rightarrow x=۱۳۰^\circ$$

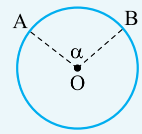
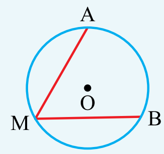
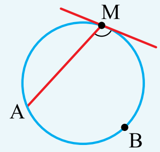
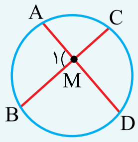
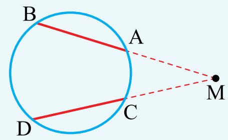
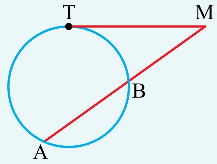
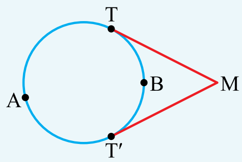
ب در این شکل ابتدا مقادیر $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BB'}+\overset{\frown}{B'C'}-\overset{\frown}{CC'}}{۲}=۷۰^\circ\\ \hat{A}'=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CC'}+\overset{\frown}{B'C'}-\overset{\frown}{BB'}}{۲}=۸۰^\circ\end{array}\right.\xrightarrow{+}\frac{۲\overset{\frown}{BC}+۲\overset{\frown}{B'C'}}{۲}=۱۵۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{B'C'}=۱۵۰^\circ\ (۱)$$

از طرفی می‌دانیم که مقدار $\hat{O}$ برابر است با:

$$\hat{O}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{B'C'}}{۲}\xrightarrow{(۱)}\hat{O}=\frac{۱۵۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$

جمع‌بندی تمام زوایای مربوط به دایره

زاویهٔ مرکزی	زاویهٔ محاطی	زاویهٔ ظلی	زاویهٔ بین دو وتر
 $\alpha = \overset{\frown}{AB}$	 $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$	 $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{ABM}}{2}$	 $\hat{M}_1 = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$
	زاویهٔ بین امتداد دو وتر	زاویهٔ بین وتر و مماس	زاویهٔ بین دو مماس
	 $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{2}$	 $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{TA} - \overset{\frown}{TB}}{2}$	 $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{TAT'} - \overset{\frown}{TBT'}}{2}$

در امتحان چه خبر؟

سؤالاتی که ممکن است از مبحث زاویه در دایره پرسیده شود به سه حالت کلی زیر تقسیم می‌شود:

تیپ ۱ *جای خالی و درست ـ نادرست: شامل حفظیات و فرمول‌های این درس*

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۲۲ تا ۲۸

تیپ ۲ *اثباتی: جزء جدانشدنی هندسه شامل اثبات فرمول‌های محاسبهٔ زاویه*

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۲۹ تا ۳۷

تیپ ۳ *و در آخر تیپ محاسباتی که یه سری اطلاعات از زوایا و کمان‌های دایره در اختیارتون میذارن و یه سری مجهول‌ها رو می‌خوان.*

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۳۸ تا ۵۰

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با عبارات یا اعداد مناسب پر کنید.

۲۲- اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر .... است.

۲۳- زاویهٔ محاطی رو به قطر دایره برابر .... درجه است.

۲۴- زاویهٔ بین دو وتر که درون دایره یکدیگر را قطع می‌کند برابر .... است.

۲۵- اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با .... اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن زاویه. *(نهایی مرداد ۱۴۰۳)*

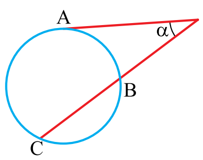
درستی و نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. (علت نادرستی را بیان کنید.)

۲۶- زاویه‌ای که رأسش روی محیط دایره، یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگرش وتری از دایره باشد، زاویهٔ محاطی است.

۲۷- زاویهٔ بین دو مماس از نقطه‌ای خارج دایره برابر مجموع کمان‌های ایجادشده توسط نقاط تماس است.

۲۸- زاویهٔ α در شکل مقابل برابر است با:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB}}{2}$$

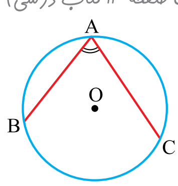


ثابت کنید:

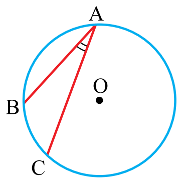
۲۹- اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است. *(فعالیت صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)*

۳۰- اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است. *(فعالیت صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)*

۳۱- در شکل روبه‌رو ثابت کنید: $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ *(فعالیت صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)*



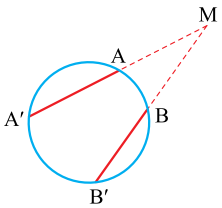
۳۲- در شکل روبه‌رو ثابت کنید: $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$ (فعالیت صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)



۳۳- ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع درون دایره برابر است با نصف مجموع اندازهٔ کمان‌هایی از دایره که به اضلاع زاویه و امتداد اضلاع زاویه محدودند. (فعالیت صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

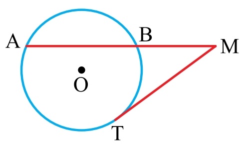
۳۴- در شکل مقابل ثابت کنید: (فعالیت صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{A'B'} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$$



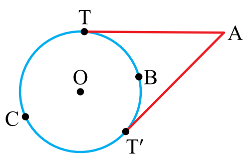
۳۵- در شکل مقابل ثابت کنید: (تمرین صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{BT}}{۲}$$



۳۶- ثابت کنید زاویهٔ بین دو خط مماس رسم‌شده از نقطهٔ A خارج دایره بر آن، برابر نصف تفاضل دو کمان ایجادشده بین نقاط T و T' است. (تمرین صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

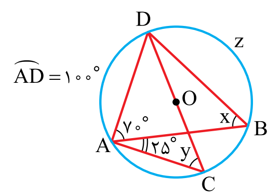
$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{TCT'} - \overset{\frown}{TBT'}}{۲}$$



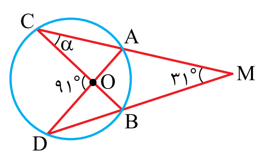
۳۷- با استفاده از تعریف زاویهٔ محاطی نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

■ در شکل‌های زیر مقادیر مجهول زاویه‌ها و کمان‌های مشخص‌شده را به دست آورید.

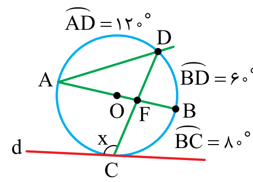
۳۸-



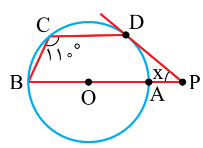
۳۹- (تمرین صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)



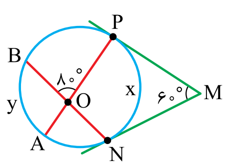
۴۰-



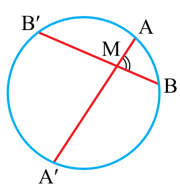
۴۱-



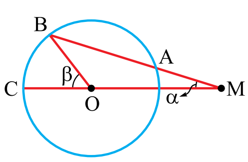
۴۲-



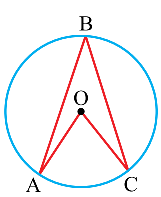
۴۳- در شکل روبه‌رو، اگر الف) $\overset{\frown}{AB} = \frac{\overset{\frown}{AB'}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۳} = \frac{\overset{\frown}{A'B}}{۳}$ ب) $\overset{\frown}{AB'} + \overset{\frown}{A'B} = ۲۲۰^\circ$
آن‌گاه مقدار زاویهٔ $A\hat{M}B$ را در هر دو حالت به دست آورید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

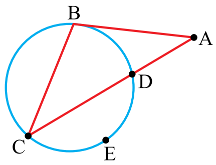


۴۴- دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و $MA = R$، نشان دهید: $\beta = ۳\alpha$. (تمرین صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

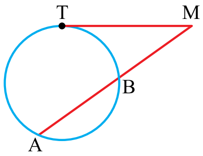


۴۵- در دایره‌ای به مرکز O اگر $A\hat{O}C = (۳\alpha + ۱۲)^\circ$ و $A\hat{B}C = (\alpha + ۱۶)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOC و زاویهٔ محاطی ABC را به دست آورید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

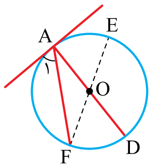




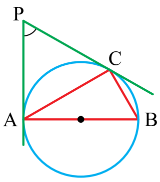
۴۶- در شکل مقابل، $AB = BC$. اگر $\overset{\frown}{CED} = ۵۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ A را به دست آورید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*



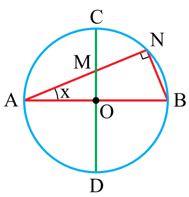
۴۷- خط مماس بر دایره در نقطهٔ T و امتداد وتر AB در نقطهٔ M متقاطع‌اند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$ و $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$ و $\frac{c}{۵} = \frac{b}{۴} = \frac{a}{۱}$، اندازهٔ زاویهٔ M را تعیین کنید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*



۴۸- در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره و $\hat{A}_۱ = ۶۱^\circ$ است. کمان AE چند درجه است؟ *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*



۴۹- در شکل مقابل، $BC = ۱$ و $AC = \sqrt{۳}$ و $AB = ۲$ است. زاویهٔ P را به دست آورید.

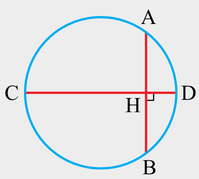


۵۰- در شکل روبه‌رو، دو قطر AB و CD بر هم عمودند. اگر $NM = NB$ باشد، مقدار x را به دست آورید.

بخش ۳: وتر در دایره

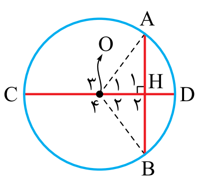
گفتیم به هر پاره‌خطی که دو سر آن روی محیط دایره باشد، وتر دایره می‌گوییم و بزرگ‌ترین وتر هم همان قطر دایره است. حالا در این درس قرار است به طور عمیق‌تر به وتر در دایره بپردازیم و با چند قضیه از وتر و رابطهٔ بین وتر و کمان در دایره آشناتر شویم.

قضیه ۱ در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیرش را نصف می‌کند. *(سؤال نهایی خرداد ۱۴۰۳)*



فرض	$\underset{\text{قطر دایره}}{CD} \perp \underset{\text{وتر دایره}}{AB}$
حکم	$AH = BH, \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}, \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$

اثبات: برای اثبات این قضیه ابتدا از مرکز دایره به دو نقطهٔ A و B وصل می‌کنیم تا مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OAH و OBH تشکیل شوند. حالا در این دو مثلث داریم:



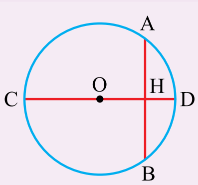
$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = \text{شعاع دایره} \\ OH \ \text{ضلع مشترک} \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{زاویهٔ قائمه}]{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OBH} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} AH = HB \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{array}\right.$$

می‌دانیم که $\hat{O}_۱$ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان AD و $\hat{O}_۲$ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان BD است و از آن‌جا که $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ پس $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AD}$ است و قطر، کمان نظیر وتر AB را نیز نصف می‌کند.

از طرفی چون $\hat{O}_۳$ مکمل $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۴$ مکمل $\hat{O}_۲$ است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_۳ = ۱۸۰^\circ - \hat{O}_۱ \\ \hat{O}_۴ = ۱۸۰^\circ - \hat{O}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲} \hat{O}_۳ = \hat{O}_۴ \xrightarrow[\hat{O}_۴ \ \text{زاویهٔ مرکزی رو به}\ \overset{\frown}{CB}]{\hat{O}_۳ \ \text{زاویهٔ مرکزی رو به}\ \overset{\frown}{AC}} \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$$

مثال: ثابت کنید: *(فعالیت صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)*



الف) در دایرهٔ روبه‌رو اگر قطر CD وتر AB را نصف کرده باشد، CD بر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

ب) در دایرهٔ روبه‌رو اگر قطر CD کمان AB را نصف کرده باشد، CD بر وتر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱. ۲ نقطه **۲.** ۲ **۳.** مرکزی

۴. ۱۴

$\pi R^{۲} = ۴۹\pi \Rightarrow R = ۷ \Rightarrow ۲R = ۱۴$

۵. ۵

$\text{درون دایره } A \Rightarrow ۷ - x < ۳ \Rightarrow x > ۴$

کم‌ترین مقدار صحیح x برابر ۵ است.

۶. به صفحهٔ ۱۰ درس‌نامه مراجعه کنید.

۷. به صفحهٔ ۱۰ درس‌نامه مراجعه کنید.

۸. به صفحهٔ ۹ درس‌نامه مراجعه کنید.

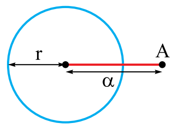
۹. به صفحهٔ ۱۰ درس‌نامه مراجعه کنید.

۱۰. به صفحهٔ ۱۰ درس‌نامه مراجعه کنید.

۱۱. به صفحهٔ ۱۰ درس‌نامه مراجعه کنید.

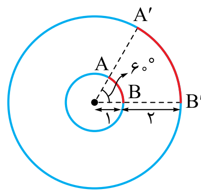
۱۲. به صفحهٔ ۹ درس‌نامه مراجعه کنید.

۱۳. فرقی نمی‌کند نقطهٔ A را بیرون یا درون دایره در نظر بگیریم، همیشه نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره از نقطهٔ A برابر است با:



$$\begin{matrix} \min = \alpha - r = ۸ \\ \max = \alpha + r = ۱۲ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} ۲r = ۴ \Rightarrow r = ۲$$

۱۴. با توجه به شکل مقابل، طول و اندازهٔ هر کدام از کمان‌ها برابر است با:

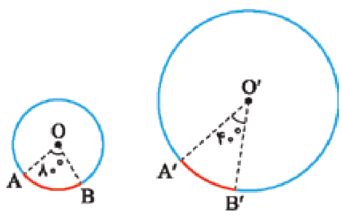


الف) $L_{\widehat{AB}} = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰^\circ} = \frac{\pi \times ۱ \times ۶۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{\pi}{۳}$

$\widehat{AB} = ۶۰^\circ$

ب) $L_{\widehat{A'B'}} = \frac{\pi \times ۳ \times ۶۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \pi \ , \ \widehat{A'B'} = ۶۰^\circ$

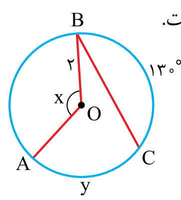
۱۵. با توجه به شکل اگر طول کمان‌های AB و A'B' با هم برابر باشد:



$$L_{\widehat{AB}} = L_{\widehat{A'B'}} \Rightarrow \frac{\pi \times r \times ۸۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{\pi \times r' \times ۴۰^\circ}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow ۲r = r'$$

پس شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر، ۲ برابر دایرهٔ کوچک‌تر است.

۱۶. اندازهٔ هر کمان برابر زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن است.



از طرفی می‌دانیم مجموع اندازهٔ کمان‌های موجود روی یک دایره برابر ۳۶۰° است، بنابراین:

$\widehat{AB} = x = ۱۰۰^\circ$

الف) $\widehat{AB} + \widehat{BC} + y = ۳۶۰^\circ \Rightarrow y = ۳۶۰^\circ - ۱۳۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۱۳۰^\circ$

ب) $y = ۷۰^\circ$

$\widehat{AB} + \widehat{BC} + y = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = ۳۶۰^\circ - ۱۳۰^\circ - ۷۰^\circ = ۱۶۰^\circ$

$\Rightarrow x = \widehat{AB} = ۱۶۰^\circ$

و طول این کمان برابر است با:

$L_{\widehat{AB}} = \frac{\pi \times ۲ \times ۱۶۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{۱۶}{۹}\pi$

۱۷. طول این کمان از دایره برابر است با:

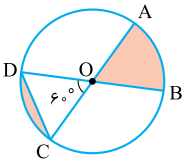
$۴\pi = \frac{\pi \times r \times ۱۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow r = \frac{۴ \times ۱۸۰^\circ}{۱۲۰^\circ} = ۶$

پس مساحت و محیط دایره برابر است با:

$P = ۲\pi r = ۱۲\pi$

$S = \pi r^{۲} = ۳۶\pi$

۱۸. مساحت قطاع AOB به صورت زیر به دست می‌آید:



$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = \text{متقابل به رأس} = ۶۰^\circ$

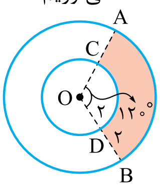
$S_{\overset{\Delta}{AOB}} = \frac{\pi r^{۲} \alpha}{۳۶۰^\circ} = \frac{\pi \times ۳^{۲} \times ۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{۳}{۲}\pi$

برای به دست آوردن مساحت قطعهٔ قرمزرنگ باید مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ODC را از قطاع ODC کم کنیم، پس داریم:

$S_{\overset{\Delta}{ODC}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} r^{۲} = \frac{۹}{۴}\sqrt{۳} \quad , \quad S_{\underset{\text{قطاع}}{ODC}} = \frac{\pi \alpha^{۲} r}{۳۶۰^\circ} = \frac{۳}{۲}\pi$

$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{۳}{۲}\pi - \frac{۹}{۴}\sqrt{۳} = \frac{۳}{۲}(\pi - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲})$

۱۹. مطابق شکل، ابتدا طول کمان‌های AB و CD را به دست می‌آوریم:



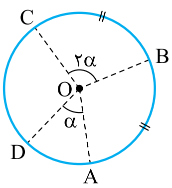
$L_{\widehat{CD}} = \frac{\pi \times r \times \alpha}{۱۸۰^\circ} = \frac{۲\pi \times ۱۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{۴}{۳}\pi$

$L_{\widehat{AB}} = \frac{۴\pi \times ۱۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{۸}{۳}\pi$

حالا برای به دست آوردن مساحت قسمت قرمزرنگ باید مساحت قطاع ODC را از قطاع OAB کم کنیم، پس:

$S_{\text{قرمزرنگ}} = \frac{\pi \times ۴^{۲} \times ۱۲۰^\circ}{۳۶۰^\circ} - \frac{\pi \times ۲^{۲} \times ۱۲۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = ۴\pi$

۲۰. اندازهٔ هر کمان برابر زاویهٔ مرکزی رو به آن است پس می‌توانیم بگوییم:



$\widehat{CB} = ۲\alpha \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \widehat{AB} = ۲\alpha$

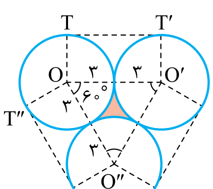
$\widehat{AD} = \alpha$

$\widehat{CD} = ۱۰۰^\circ$

مجموع کمان‌های روی دایره برابر ۳۶۰° است پس:

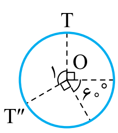
$۲\alpha + ۲\alpha + \alpha + ۱۰۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۵\alpha = ۲۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۵۲^\circ$

۲۱. الف) مطابق شکل نخ روی هر دایره در دو نقطه مماس است و از آن‌جا که شعاع به نقطهٔ تماس عمود است، چهارضلعی‌های تشکیل‌شده روی شکل مقابل همگی مستطیل هستند پس در مستطیل OO'T'T داریم:



$TT' = OO' = ۶$

حالا در دایرهٔ C(O,۳) داریم:



$\hat{O} = ۳۶۰^\circ - ۹۰^\circ - ۹۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$

$L_{\widehat{TT''}} = \frac{\pi \times ۳ \times ۱۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = ۲\pi$

در نتیجه طول نخ برابر است با: $\text{طول} = ۳TT' + ۳TT'' = ۱۸ + ۶\pi$

ب) مساحت ناحیهٔ رنگی برابر است با مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع OO'O'' منهای ۳تا قطاع با زاویهٔ ۶۰° و شعاع ۳:

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\overset{\Delta}{OO'O''}} - ۳S_{\text{قطاع}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۶^{۲} - ۳ \times \frac{\pi \times ۳^{۲} \times ۶۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = ۹\sqrt{۳} - \frac{۹\pi}{۲}$$

۲۲. نصف کمان روبه‌روی آن

۲۳. ۹۰

۲۴. نصف مجموع کمان‌های روبه‌روی آن

۲۵. نصف

۲۶. نادرست؛ زاویهٔ ظلی است.

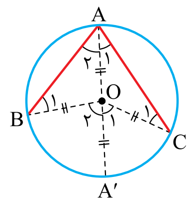
۲۷. نادرست؛ برابر نصف تفاضل کمان‌های ایجادشده است.

۲۸. درست

۲۹. به صفحه ۱۲ درس‌نامه مراجعه کنید.

۳۰. به صفحه ۱۳ درس‌نامه مراجعه کنید.

۳۱. برای اثبات، ابتدا قطر گذرنده از نقطهٔ A روی دایره را رسم می‌کنیم سپس از C و B به نقطهٔ O وصل می‌کنیم.



زاویهٔ $O_۱$ و $O_۲$ به ترتیب زاویهٔ خارجی برای مثلث‌های OAC و OAB است و از طرفی می‌دانیم:

$\hat{O}_۱ = \overset{\frown}{A'C}\ (۱)\ ,\ OA = OC = r \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱\ (۳)$

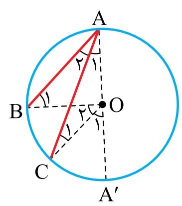
$\hat{O}_۲ = \overset{\frown}{A'B}\ (۲)\ ,\ OA = OB = r \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{B}_۱\ (۴)$

زاویهٔ خارجی $\hat{O}_۱ = \hat{C}_۱ + \hat{A}_۱ \overset{(۳)}{=} ۲\hat{A}_۱ \overset{(۱)}{=} \overset{\frown}{A'C} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{A'C}}{۲}$

زاویهٔ خارجی $\hat{O}_۲ = \hat{B}_۱ + \hat{A}_۲ \overset{(۴)}{=} ۲\hat{A}_۲ \overset{(۲)}{=} \overset{\frown}{A'B} \Rightarrow A_۲ = \frac{\overset{\frown}{A'B}}{۲}$

حالا زاویهٔ A برابر است با: $\hat{A} = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{A'C}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{A'B}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

۳۲. برای اثبات ابتدا قطر گذرنده از A را رسم کرده سپس از B و C به O وصل می‌کنیم و داریم:



$\hat{O}_۱ = \overset{\frown}{A'C}\ (۱)\ ,\ OA = OB = r$

$\Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \hat{B}_۱\ (۲)$

$\hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = \overset{\frown}{BA'}\ ,\ OC = OA = r \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{A}_۱\ (۳)$

$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AOC} \text{ زاویهٔ خارجی برای } \hat{O}_۱ = \hat{C}_۱ + \hat{A}_۱ \overset{(۳)}{=} ۲\hat{A}_۱ \\ (۱) \text{ ازطرفی طبق}: \hat{O}_۱ = \overset{\frown}{A'C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{A'C}}{۲}$

$\overset{\Delta}{AOB}$ زاویهٔ خارجی برای $\hat{O}_۲ + \hat{O}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + \hat{B}_۱$

$\overset{(۲)}{=} ۲(\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲) = \overset{\frown}{BA'} \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{BA'}}{۲}$

زاویهٔ محاطی $A_۲$ برابر است با:

$\hat{A} = (\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲) - \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BA'} - \overset{\frown}{CA'}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

۳۳. به صفحه‌های ۱۴ درس‌نامه مراجعه کنید.

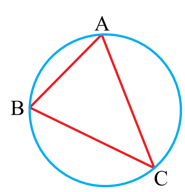
۳۴. به صفحه ۱۴ درس‌نامه مراجعه کنید.

۳۵. به صفحه ۱۵ درس‌نامه مراجعه کنید.

۳۶. به صفحه ۱۵ درس‌نامه مراجعه کنید.

۳۷. برای حل این سؤال یک مثلث درون یک دایره به گونه‌ای رسم می‌کنیم که هر سه رأس مثلث روی محیط دایره قرار بگیرند:

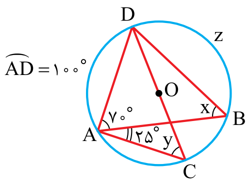
مطابق شکل هر کدام از زوایای A و B و C محاطی هستند و اندازهٔ آن‌ها برابر است با:



$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \\ \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB} = ۳۶۰^\circ} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB}}{۲} = ۱۸۰^\circ$

۳۸.

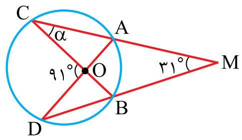


محاطی $x = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} = \frac{۱۰۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$

محاطی $y = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} = ۵۰^\circ$

$z = ۲ \times ۷۰^\circ = ۱۴۰^\circ$

۳۹.



$\hat{O} = \frac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AB}}{۲} = ۹۱$

$\Rightarrow \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AB} = ۱۸۲^\circ\ (۱)$

$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{۲} = ۳۱^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB} = ۶۲^\circ\ (۲)$

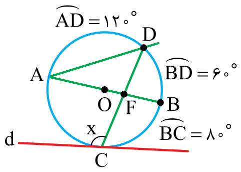
$(۱) - (۲) = ۲\overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$

محاطی $\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = ۳۰^\circ$

۴۰.

$\overset{\frown}{AC} = ۳۶۰^\circ - \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{BC}$

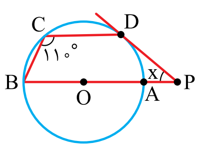
$= ۳۶۰^\circ - ۱۲۰^\circ - ۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۰۰^\circ$



ظلی $x = \frac{\overset{\frown}{CAD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AD}}{۲}$

$= \frac{۲۲۰^\circ}{۲} = ۱۱۰^\circ$

۴۱.



محاطی $C = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{AD}}{۲}$

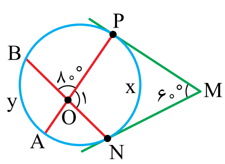
$= \frac{۱۸۰^\circ + \overset{\frown}{AD}}{۲} = ۱۱۰^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۲۲۰^\circ - ۱۸۰^\circ = ۴۰^\circ$

$\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{AD} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BCD} = ۱۴۰^\circ$

$\Rightarrow x = \hat{P} = \frac{\overset{\frown}{BCD} - \overset{\frown}{AD}}{۲} = \frac{۱۴۰^\circ - ۴۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$

۴۲.



$\hat{O} = \frac{\overset{\frown}{BP} + \overset{\frown}{AN}}{۲} = ۸۰^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{BP} + \overset{\frown}{AN} = ۱۶۰^\circ\ (۱)$

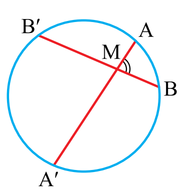
$M = \frac{\overset{\frown}{BP} + \overbrace{\overset{\frown}{AB}}^{y} + \overset{\frown}{AN} - \overbrace{\overset{\frown}{PN}}^{x}}{۲} = ۶۰^\circ \xrightarrow{(۱)} \frac{۱۶۰^\circ + y - x}{۲} = ۶۰^\circ$

$\Rightarrow y - x = -۴۰\ (۲)$

$\hat{O}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ = ۱۰۰^\circ = \frac{y + x}{۲} = ۱۰۰^\circ \Rightarrow y + x = ۲۰۰\ (۳)$

$(۲) + (۳) = ۲y = ۱۶۰^\circ \Rightarrow y = ۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۲۰^\circ$

۴۳. الف با استفاده از رابطهٔ صورت سؤال داریم:



$\overset{\frown}{AB'} = ۲\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{A'B'} = ۳\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{A'B} = ۳\overset{\frown}{AB}$

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BA'} + \overset{\frown}{A'B'} + \overset{\frown}{B'A} = ۳۶۰^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} + ۳\overset{\frown}{AB} + ۳\overset{\frown}{AB} + ۲\overset{\frown}{AB} = ۳۶۰^\circ$

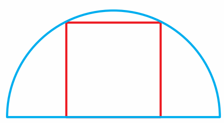
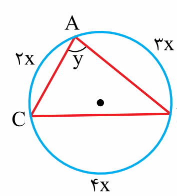
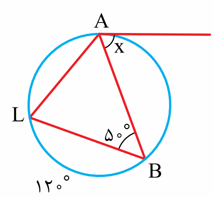
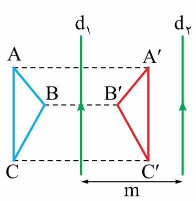
$۹\overset{\frown}{AB} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۴۰^\circ$

$A'B' = ۱۲۰^\circ$

پس مقدار زاویهٔ AMB برابر است با:

$\Rightarrow A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{A'B'} + \overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۱۶۰^\circ}{۲} = ۸۰^\circ$

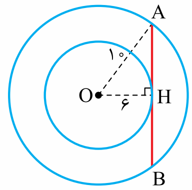
آزمون‌های نوبت اوّل و دوم

ردیف	نمونهٔ امتحان نیم‌سال اول — امتحان شمارهٔ ۱	رشته: ریاضی ـ فیزیک — مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	هندسه ۲ — Kheilisabz.com	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل‌یافتهٔ آن بر خود نقطه منطبق شود، .... می‌نامیم. ب) شعاع‌های دو دایرهٔ هم‌مرکز ۶ و ۱۰ است. اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است برابر .... است. پ) ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع و آن دایره محدود است را .... می‌نامیم.			۰/۷۵
۲	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی با اضلاع ۸، ۱۵ و ۱۷ برابر ۳ است. ب) دوران لزوماً شیب را حفظ نمی‌کند. پ) اگر تبدیل همانی نباشد، آن‌گاه بی‌شمار نقطهٔ ثابت تبدیل ندارد.			۰/۷۵
۳	گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید. (راه حل بنویسید.) الف) در شکل مقابل شعاع نیم‌دایره ۷/۵ سانتی‌متر است. مساحت مربع محاط در نیم‌دایره چند سانتی‌متر مربع است؟ (با راه حل)  ۱) ۴۵ ۲) $۳\sqrt{۵}$ ۳) ۵۰ ۴) $۵\sqrt{۲}$ ب) کدام‌یک از موارد زیر در مورد تبدیل طولپا (ایزومتری) درست است؟ ۱) اندازهٔ زاویه‌ها، موقعیت و جهت شکل را تغییر می‌دهد. ۲) می‌تواند موقعیت شکل را تغییر دهد، ولی الزاماً اندازهٔ زاویه‌ها و جهت شکل را حفظ می‌کند. ۳) اندازهٔ زاویه‌ها را حفظ می‌کند، ولی می‌تواند موقعیت و جهت شکل را تغییر دهد. ۴) اندازهٔ زاویه‌ها، موقعیت و جهت شکل را الزاماً حفظ می‌کند.			۱ ۰/۵
۴	ثابت کنید در هر دایرهٔ قطری که بر یک وتر عمود است، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.			۱/۵
۵	ثابت کنید اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره در بیرون دایره پدید می‌آید، برابر نصف تفاضل اندازهٔ کمان‌هایی از آن دایره است که به اضلاع آن زاویه محدودند.			۱/۵
۶	ثابت کنید انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.			۱/۷۵
۷	اندازهٔ x و y را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید. الف)  ب)  			۲/۲۵
۸	در شکل مقابل، d_1 به موازات d_2 و به فاصلهٔ m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.  الف) نشان دهید $AA'' = ۲m$ ب) با چه تبدیلی می‌توان $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟			۲
۹	در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{۳}$ واحد، طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ محاطی داخلی و محاطی خارجی آن چه‌قدر است؟			۲
۱۰	اگر r_a، r_b و r_c شعاع‌های سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی باشد، نشان دهید: $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$			۱/۵
۱۱	یک ذوزنقه هم محیطی و هم محاطی است. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه، برابر است با میانگین حسابی دو قاعدهٔ آن ضرب‌در میانگین هندسی آن‌ها.			۲/۵
۱۲	طول خط‌المرکزین در دو دایرهٔ متقاطع به شعاع‌های ۳ و ۴ سانتی‌متر برابر ۶ است. اندازهٔ طول مماس‌مشترک خارجی این دو دایره را به دست آورید.			۱
۱۳	دوران‌یافتهٔ نقطهٔ $A(a,a+1)$ حول نقطهٔ $B(1,0)$ نقطهٔ $C(-1,2)$ است. مقدار مثبت a چه‌قدر است؟			۱
	جمع نمرات			۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱. الف نقطهٔ ثابت (۰/۲۵)

ب ۱۶ (۰/۲۵)؛



قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OAH} \Rightarrow AH^۲ = OA^۲ - OH^۲$

$= ۱۰^۲ - ۶^۲ = ۸^۲ \Rightarrow AH = ۸$

$\Rightarrow AB = ۲ \times ۸ = ۱۶$

پ قطاع (۰/۲۵)

۲. الف درست (۰/۲۵)؛

$۱۷^۲ = ۱۵^۲ + ۸^۲ \Rightarrow$ مثلث قائم‌الزاویه $\Rightarrow \begin{cases} P = \frac{۱۷+۱۵+۸}{۲} = ۲۰ \\ S = \frac{۸\times ۱۵}{۲} = ۶۰ \end{cases}$

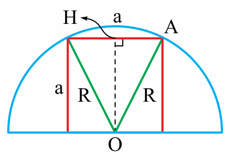
$\Rightarrow r = \frac{S}{P} = \frac{۶۰}{۲۰} = ۳$

پ درست (۰/۲۵)

ب نادرست (۰/۲۵)؛ تبدیل بازتاب همانی نیست، اما بی‌شمار نقطهٔ ثابت تبدیل دارد.

۳. الف ۱ (۰/۲۵)؛

اگر طول ضلع مربع را a بگیریم، داریم:



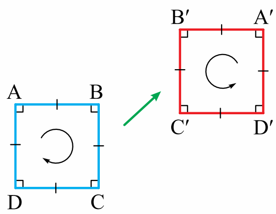
قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{AHO}: R^۲ = a^۲ + (\frac{a}{۲})^۲$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow R^۲ = a^۲ + \frac{a^۲}{۴} = \frac{۵a^۲}{۴}$

$\Rightarrow$ مساحت مربع: $a^۲ = \frac{۴R^۲}{۵}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a^۲ = \frac{۲۲۵}{۵} = ۴۵$ (۰/۲۵)

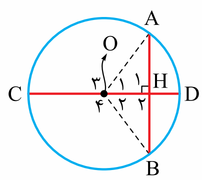
ب ۳ (۰/۲۵)؛

تبدیل طولپا، اندازهٔ شکل و در نتیجه اندازهٔ زاویه‌های آن را حفظ می‌کند، ولی موقعیت و جهت شکل می‌تواند تغییر کند. (۰/۲۵)



(تبدیل طولپا)

۴. ابتدا از مرکز دایره به دو نقطهٔ A و B وصل می‌کنیم تا مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OAH و OBH تشکیل شوند، حالا در این دو مثلث داریم:



شعاع دایره $= OA = OB$

ضلع مشترک OH

$\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow[\text{زاویهٔ قائمه}]{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OBH}$

$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} AH = BH \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{cases}$ (۰/۲۵)

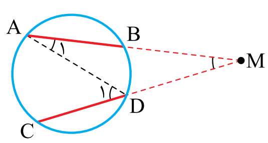
می‌دانیم که $\hat{O}_۱$ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان AD و $\hat{O}_۲$ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان BD است و از آن‌جا که $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$، پس $BD = AD$ است (۰/۵) و قطر، کمان نظیر وتر AB را نیز نصف می‌کند.

از طرفی چون $\hat{O}_۳$ مکمل $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۴$ مکمل $\hat{O}_۲$ است، داریم:

$\begin{cases} \hat{O}_۳ = ۱۸۰^\circ - \hat{O}_۱ \\ \hat{O}_۴ = ۱۸۰^\circ - \hat{O}_۲ \end{cases}$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲} \hat{O}_۳ = \hat{O}_۴$

$\xrightarrow[\hat{O}_۴ \text{ زاویهٔ مرکزی رو به } CB]{\hat{O}_۳ \text{ زاویهٔ مرکزی رو به } AC} \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$ (۰/۲۵)

۵. ابتدا نقاط A و D روی محیط دایره را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا مثلث ADM تشکیل شود (۰/۲۵). حالا زاویهٔ $\hat{D}_۱$، یک زاویهٔ خارجی برای $\overset{\Delta}{ADM}$ است که مقدار آن برابر با $\hat{D}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{M}$ است (۰/۲۵).



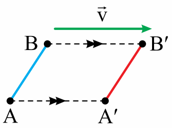
در نتیجه می‌توانیم مقدار $\hat{M}$ را به صورت زیر به دست آوریم:

$\begin{cases} \hat{D}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{M} \ (۰/۲۵) \\ \text{محاطی } \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \ (۰/۲۵) \\ \text{محاطی } \hat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \ (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \hat{M} = \hat{D}_۱ - \hat{A}_۱$

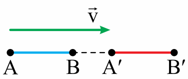
$= \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{۲}$ (۰/۲۵)

۶. سؤال را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

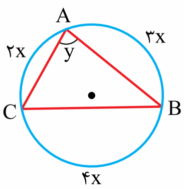
حالت اول: اگر AB با $\vec{v}$ موازی نباشد، انتقال‌یافتهٔ AB تحت $\vec{v}$ را رسم کرده و آن را $A'B'$ می‌نامیم. طبق تعریف انتقال، می‌دانیم $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{v}$ (۰/۲۵) و $AA' \parallel BB' \parallel \vec{v}$، پس در چهارضلعی $AA'B'B$ دو ضلع AA' و BB' موازی و مساوی‌اند (۰/۲۵). در نتیجه $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است و می‌توانیم بگوییم $AB \parallel A'B'$ (۰/۲۵)، پس انتقال، شیب خط AB را تغییر نداده است. (۰/۲۵)



حالت دوم: اگر پاره‌خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد انتقال‌یافتهٔ آن یعنی $A'B'$ روی امتداد AB قرار دارد (۰/۲۵). پس $AB \parallel A'B'$ (۰/۲۵) و انتقال شیب خط AB را حفظ کرده است. (۰/۲۵)



۷. الف مجموع کمان‌های یک دایره برابر ۳۶۰° است؛ پس:



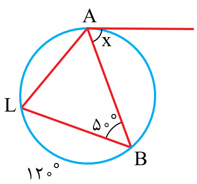
$۲x + ۳x + ۴x = ۳۶۰^\circ$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow ۹x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$ (۰/۲۵)

از طرفی $\hat{A}$ زاویهٔ محاطی است؛ پس:

$\underbrace{\hat{A} = y = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}}_{(۰/۲۵)} = \frac{۴x}{۲} = ۲x = ۲ \times ۴۰^\circ = ۸۰^\circ$ (۰/۲۵)

ب $\hat{B}$ زاویهٔ محاطی است؛ پس:



$\hat{B} = ۵۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{AL}}{۲}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \overset{\frown}{AL} = ۱۰۰^\circ$ (۰/۲۵)

مجموع کمان‌های دایره برابر ۳۶۰° است؛ پس:

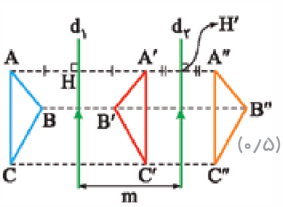
$\overset{\frown}{AL} + \overset{\frown}{BL} + \overset{\frown}{AB} = ۳۶۰^\circ$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow ۱۲۰^\circ + ۱۰۰^\circ + \overset{\frown}{AB} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۱۴۰^\circ$ (۰/۲۵)

حالا چون زاویهٔ x یک زاویهٔ ظلی است، می‌توانیم بگوییم:

$x = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۱۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$ (۰/۲۵)

۸. بازتاب $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ نسبت به محور $d_۲$ برابر $A''B''C''$ است.



الف می‌دانیم هر محور بازتاب، عمودمنصف پاره‌خط بین نقطه و تصویر آن است؛ پس:

$AH = A'H, A'H' = A''H'$ (۰/۵)

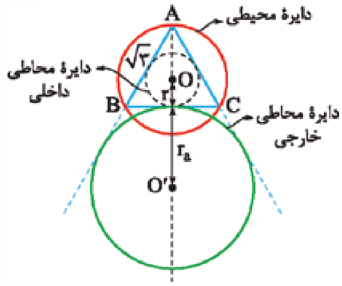
پس AA'' برابر است با:

$AA'' = \underbrace{AH + A'H}_{=} + \underbrace{A'H' + A''H'}_{=} = ۲A'H + ۲A'H'$

$= ۲(\underbrace{A'H + A'H'}_{m}) = ۲m$ (۰/۵)

ب اگر هر نقطه از مثلث ABC را تحت برداری به طول ۲m و عمود بر محورهای بازتاب $d_۱$ و $d_۲$ انتقال دهیم، به مثلث $A''B''C''$ می‌رسیم؛ پس نتیجه می‌گیریم «ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی، یک انتقال با برداری برابر فاصلهٔ بین آن دو محور موازی است. (۰/۵)

۹. یک مثلث متساوی‌الاضلاع با دایرهٔ محاطی داخلی و محاطی خارجی آن رسم می‌کنیم:
همان‌طور که می‌بینید طول خط‌المرکزین دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی این مثلث برابر است با حاصل‌جمع شعاع‌های این دو دایره:



$OO'=r+r_a$ (۰/۲۵)

$r=\frac{S}{P}$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow[P=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\ (۰/۲۵)]{S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۳})^۲=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}\ (۰/۲۵)} r=\dfrac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}}{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵)

$r_a=\frac{S}{P-a}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow r_a=\dfrac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}}{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}-\sqrt{۳}}=\dfrac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۳}{۲}$ (۰/۲۵)

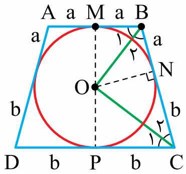
در نتیجه طول خط‌المرکزین برابر است با: $OO'=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=۲$ (۰/۲۵)

۱۰. اگر S مساحت و P نصف محیط باشد، شعاع دایره‌های محاطی داخلی و خارجی برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l} r=\frac{S}{P}\ (۰/۲۵) \\ r_a=\frac{S}{P-a}\ (۰/۲۵) \\ r_b=\frac{S}{P-b}\ (۰/۲۵) \\ r_c=\frac{S}{P-c}\ (۰/۲۵) \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{P-a}{S}+\frac{P-b}{S}+\frac{P-c}{S}}$$

$$=\frac{۳P-\overbrace{(a+b+c)}^{۲P}}{S}=\frac{P}{S}=\frac{۱}{r}\ (۰/۵)$$

۱۱. می‌دانیم ذوزنقهٔ محاطی، حتماً متساوی‌الساقین است (۰/۲۵). از طرفی اگر نیمسازهای B و C را رسم کنیم، یکدیگر را در مرکز دایرهٔ محاطی قطع می‌کنند (۰/۲۵): $\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$



$\Rightarrow \frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۲+\hat{C}_۲=۹۰^\circ$ (۰/۲۵)

در نتیجه مثلث OBC قائم‌الزاویه است و داریم: $B\hat{O}C=۹۰^\circ$ (۰/۲۵)

حال اگر ارتفاع وارد بر وتر این مثلث را رسم کنیم (ON)، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$ON^۲=a\times b$ (۰/۲۵) $\xrightarrow[r=\text{شعاع دایرهٔ محاطی}]{ON=r} r^۲=a\times b$

$\xrightarrow{MP=۲r} (\frac{MP}{۲})^۲=ab$ (۰/۲۵) $\Rightarrow MP=\sqrt{\underbrace{۲a}_{AB}\times\underbrace{۲b}_{DC}}$

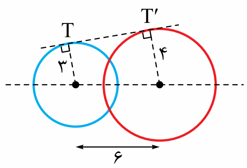
$\Rightarrow MP=\sqrt{AB\times DC}$ (۰/۵)

حالا مساحت ذوزنقه برابر است با:

$S_{ABCD}=\frac{AB+DC}{۲}(MP)$ (۰/۲۵)

$=\underbrace{\frac{AB+DC}{۲}}_{\text{میانگین حسابی}}\times\underbrace{\sqrt{AB\times DC}}_{\text{میانگین هندسی}}$ (۰/۲۵)

۱۲.

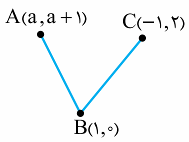


$\underbrace{TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}}_{(۰/۵)}$

$\Rightarrow TT'=\sqrt{۶^۲-(۴-۳)^۲}$

$=\sqrt{۳۵}$ (۰/۵)

۱۳. دوران تبدیلی ایزومتری است؛ پس:



$|AB|=|BC|$ (۰/۵)

$\Rightarrow \sqrt{(a-۱)^۲+(a+۱)^۲}=\sqrt{۴+۴}$ (۰/۲۵)

$\sqrt{۲a^۲+۲}=\sqrt{۸} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲a^۲=۶ \Rightarrow a=\pm\sqrt{۳}$

که سؤال مقدار مثبت a را می‌خواهد، پس: $a=+\sqrt{۳}$ (۰/۲۵)